

Une version ultradifférentiable du théorème de Borel

Par Pascal BEAUGENDRE

Lycée HOCHE de Versailles et

Université de Paris XI Orsay, Mathématiques Bât. 425, 91405 ORSAY.

pascal.beaugendre@laposte.net

Résumé

Dans cet article on établit une version ultradifférentiable du théorème de Borel. L'un des ingrédients est une construction basée sur l'utilisation de produits de convolution qui permet d'obtenir des fonctions infiniment dérivables dont la croissance des dérivées est contrôlée. On remarquera que ce résultat intermédiaire peut être utilisé pour démontrer une partie du théorème de Denjoy-Carleman.

Mots clés : Théorème de Borel, fonctions ultradifférentiables, produits de convolution, quasi-analyticité, théorème de Denjoy-Carleman, classes de Gevrey.

1 Introduction

Bien que cet article soit indépendant de celui que j'ai écrit précédemment pour la RMS il concerne une question qui avait été évoquée dans les commentaires de [Be3]. Le point de départ est encore le théorème de Borel suivant.

Théorème 1 ([Bo]) *Soit $(u_p)_{p \geq 0}$ une suite de réels. Il existe une fonction f appartenant à $C^\infty(\mathbb{R})$ telle que, pour tout entier p , on ait $u_p = f^{(p)}(0)$.*

Ce théorème suggère la question suivante : si la suite de réels $(u_p)_{p \geq 0}$ vérifie des «conditions de croissance», peut-on construire une fonction f appartenant à $C^\infty(\mathbb{R})$, vérifiant encore $(u_p)_{p \geq 0} = (f^{(p)}(0))_{p \geq 0}$ et dont les dérivées vérifient des «conditions de croissance» analogues ? En d'autres termes, on s'intéresse aux versions ultradifférentiables du théorème de Borel. (Une classe ultradifférentiable de fonctions est un ensemble de fonctions infiniment dérivables, défini par une condition de croissance des dérivées ; la définition précise sera donnée au paragraphe 4.)

Dans cet article on commence par rappeler la démonstration du théorème 1. En effet, bien qu'elle soit classique, cela permettra d'expliquer les raffinements que nous serons amenés à faire pour obtenir une version ultradifférentiable de ce

théorème. Ensuite on établit un résultat intermédiaire permettant d'obtenir des fonctions «en cloche» à dérivées contrôlées. Enfin, on démontre un théorème de Borel «dans le carré de la classe» (le théorème 3) et on explique brièvement que l'on peut en déduire une réponse complète, dans le cadre de classes ultradifférentiables construites sur le modèle de l'intersection des classes de Gevrey.

Bien sûr, comme il existe d'autres classes ultradifférentiables, cet article n'a pas la prétention de traiter ce problème de façon exhaustive.

2 Démonstration du théorème de Borel classique

Si g est une fonction bornée sur \mathbb{R} , on pose

$$\|g\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |g(t)|.$$

Pour tout $(p, j) \in \mathbb{N}^2$, on note $\delta_{p,j}$ le symbole de Kronecker : $\delta_{p,j} = 1$ si $p = j$, $\delta_{p,j} = 0$ sinon.

Pour démontrer le théorème 1 nous allons construire une suite de fonctions $(\chi_p)_{p \geq 0}$, de classe C^∞ sur \mathbb{R} et vérifiant les deux conditions suivantes :

- pour tout $(j, p) \in \mathbb{N}^2$, on a $\chi_p^{(j)}(0) = \delta_{p,j}$,
- pour tout $j \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{p \geq 0} u_p \chi_p^{(j)}$ est normalement convergente.

Alors nous pourrions conclure en considérant la fonction $f = \sum_{p=0}^{+\infty} u_p \chi_p$.

On considère la fonction κ définie sur \mathbb{R} par $\kappa(x) = \exp\left(\frac{-1}{x(1-x)}\right)$ si $x \in]0, 1[$ et $\kappa(x) = 0$ sinon. On vérifie facilement que cette fonction est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et que, pour tout j appartenant à \mathbb{N} , on a

$$\kappa^{(j)}(0) = \kappa^{(j)}(1) = 0. \quad (1)$$

(A cause de la forme de son graphe, on dit souvent que κ est une fonction «en cloche».) Maintenant, on considère la fonction

$$\rho : x \mapsto \frac{\int_{-\infty}^x \kappa(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} \kappa(t) dt};$$

c'est une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} , positive, nulle sur \mathbb{R}_- et égale à 1 sur $[1, +\infty[$. D'après (1), on a

$$\forall j \in \mathbb{N}, \rho^{(j)}(0) = 0.$$

Enfin la fonction $\varphi : x \mapsto 1 - \rho(|x|)$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et vérifie

- pour tout entier j , $\varphi^{(j)}(0) = \delta_{0,j}$,
- $\varphi = 0$ sur le complémentaire de l'intervalle $[-1, 1]$.

Soit $(\lambda_p)_{p \geq 0}$ une suite de réels appartenant à $[1, +\infty[$ qui sera choisie plus loin. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note χ_p la fonction définie par

$$\chi_p(x) = \frac{x^p}{p!} \varphi(\lambda_p x).$$

Si $(j, p) \in \mathbb{N}^2$, alors, d'après la formule de Leibniz, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\chi_p^{(j)}(x) = \sum_{l=\max(0, j-p)}^j \binom{j}{l} \lambda_p^l \varphi^{(l)}(\lambda_p x) \frac{x^{p-j+l}}{(p-j+l)!} \quad (2)$$

et donc

$$\chi_p^{(j)}(0) = \delta_{p,j}.$$

Soit $(j, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leq p$ et $0 \leq j \leq p-1$. D'après (2), pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\chi_p^{(j)}(x) = \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} \lambda_p^l \varphi^{(l)}(\lambda_p x) \frac{x^{p-j+l}}{(p-j+l)!}.$$

Si $|\lambda_p x| \geq 1$, alors

$$\chi_p^{(j)}(x) = 0.$$

Sinon, on a

$$\left| \chi_p^{(j)}(x) \right| \leq \sup_{l \leq p-1} \left\| \varphi^{(l)} \right\|_{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_p} \right)^{p-j} \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} \frac{1}{(p-j+l)!}.$$

Or $\lambda_p \geq 1$ et $p-j \geq 1$ donc $\left(\frac{1}{\lambda_p} \right)^{p-j} \leq \frac{1}{\lambda_p}$. D'autre part $\sum_{l=0}^j \binom{j}{l} \frac{1}{(p-j+l)!} \leq \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} = 2^j \leq 2^{p-1}$.

On a donc

$$\left\| \chi_p^{(j)} \right\|_{\infty} \leq \frac{2^{p-1}}{\lambda_p} \sup_{l \leq p-1} \left\| \varphi^{(l)} \right\|_{\infty}.$$

Si on choisit $\lambda_0 = 1$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_p = \max \{1, 4^p |u_p| \sup_{l \leq p-1} \left\| \varphi^{(l)} \right\|_{\infty}\}$, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall j \in \{0, \dots, p-1\}, \left\| u_p \chi_p^{(j)} \right\|_{\infty} \leq 2^{-(p+1)}.$$

Alors, pour tout $j \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{p \geq 0} u_p \chi_p^{(j)}$ est normalement convergente. Ainsi, en utilisant le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions, on peut affirmer que la série de fonctions $\sum_{p \geq 0} u_p \chi_p$ converge et que sa somme, c'est-à-dire la fonction

$$f = \sum_{p=0}^{+\infty} u_p \chi_p, \quad (3)$$

est de classe C^{∞} . De plus, pour tout entier j , on a

$$f^{(j)}(0) = \sum_{p=0}^{+\infty} u_p \chi_p^{(j)}(0) = \sum_{p=0}^{+\infty} u_p \delta_{p,j}(0) = u_j,$$

ce qui termine la démonstration.

Remarque 1 Dans cette démonstration on constate que pour majorer $\|\chi_p^{(j)}\|_\infty$ deux choses importantes interviennent : les dérivées de la fonction φ et la taille du support de la fonction $x \mapsto \varphi(\lambda_p x)$ (à cause du terme $\frac{x^{p-j+l}}{(p-j+l)!}$ de (2)). Nous allons raffiner cette démonstration en construisant des fonctions ayant de «petits supports» dont les dérivées ont une croissance contrôlée.

3 Fonctions ultradifférentiables «en cloche»

Le résultat principal de ce paragraphe est le théorème 2. Il permet d'obtenir des fonctions susceptibles de jouer le rôle de κ , la fonction «en cloche» du paragraphe 2 et dont la croissance des dérivées est contrôlée. Sa démonstration repose sur une construction utilisant des produits de convolution. On donne ici tous les détails de cette construction ; il s'agit d'une méthode attribuée à H.E. Bray et que l'on trouve exposée dans les livres de S. Mandelbrot et de L. Hörmander ([Ma] et [Hö]).

Définition 1 Soit f une fonction continue par morceaux sur \mathbb{R} , on appelle *support* de f l'adhérence de l'ensemble des réels x tels que $f(x) \neq 0$. Ainsi,

$$Supp(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\}}.$$

On dit que la fonction f est à *support compact* lorsque $Supp(f)$ est un compact de \mathbb{R} . Cela signifie que la fonction f est nulle en dehors d'un segment. On note $CM_0(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur \mathbb{R} , à support compact.

Notation 1 Pour tout $\alpha > 0$, on pose $H_\alpha = \frac{1}{\alpha} \chi_{]0, \alpha[}$. La fonction H_α est continue par morceaux sur \mathbb{R} et elle vérifie $\int_{-\infty}^{+\infty} H_\alpha(x) dx = 1$. C'est bien sûr une fonction à support compact. (Ici $\chi_{]0, \alpha[}$ désigne la fonction caractéristique de l'intervalle $]0, \alpha[$.)

Définition 2 Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux dont l'une au moins est à support compact, on peut poser, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt. \quad (4)$$

On définit ainsi nouvelle fonction, $f * g$, appelée le *produit de convolution* de f par g . Cette fonction est définie sur \mathbb{R} .

Propriété 1 Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux dont l'une au moins est à support compact, alors $f * g = g * f$.

Démonstration. Il suffit d'effectuer le changement de variable $\eta = x - t$ dans l'intégrale de (4). ■

Propriété 2 Si les deux fonctions f et g appartiennent à $CM_0(\mathbb{R})$, alors

$$\text{Supp}(f * g) \subset \text{Supp}(f) + \text{Supp}(g).$$

Démonstration. Si $f * g(x_0) \neq 0$, alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $f(t)g(x_0 - t) \neq 0$. En d'autres termes il existe $t \in \{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\}$ tel que $x_0 - t \in \{x \in \mathbb{R}, g(x) \neq 0\}$ et donc

$$x_0 \in \{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\} + \{x \in \mathbb{R}, g(x) \neq 0\}.$$

Ainsi

$$\{x \in \mathbb{R}, f * g(x) \neq 0\} \subset \{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\} + \{x \in \mathbb{R}, g(x) \neq 0\}.$$

Or $\overline{\{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\}} + \overline{\{x \in \mathbb{R}, g(x) \neq 0\}}$ est fermé puisque c'est la somme de deux compacts. On en déduit que

$$\text{Supp}(f * g) \subset \text{Supp}(f) + \text{Supp}(g).$$

■

Propriété 3 Si f, g et h sont trois fonctions continues par morceaux dont au moins deux sont à support compact, alors $(f * g) * h = f * (g * h)$. On notera cette fonction simplement $f * g * h$.

Démonstration. Soit x un réel, on a

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(t) h(x - t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(t - u) du \right) h(x - t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t - u) h(x - t) dt \right) f(u) du. \end{aligned}$$

Si on pose $v = t - u$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t - u) h(x - t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(v) h(x - u - v) dv = g * h(x - u)$$

et donc

$$((f * g) * h)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) (g * h)(x - u) du = (f * (g * h))(x).$$

■

Corollaire 1 Si les deux fonctions f et g appartiennent à $CM_0(\mathbb{R})$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f * g(x) dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx \right).$$

Démonstration. Si on prend $h = 1$, alors la fonction $g * h$ est constante et vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$. Donc la fonction $f * (g * h)$ est elle aussi constante et elle vaut

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx \right).$$

En calculant $(f * g) * h$, on obtient qu'une autre expression de cette constante est

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f * g(t) dt.$$

■

Notation 2 Si θ est une fonction définie sur \mathbb{R} , pour tous $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}_+$, on note $\tau_\alpha \cdot \theta$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tau_\alpha \cdot \theta(x) = \theta(x - \alpha)$$

et $(\tau_\alpha - \tau_{\alpha'}) \cdot \theta$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\tau_\alpha - \tau_{\alpha'}) \cdot \theta(x) = \tau_\alpha \cdot \theta(x) - \tau_{\alpha'} \cdot \theta(x).$$

On notera $\tau_\alpha \cdot \tau_{\alpha'}$ l'action de $\tau_{\alpha'}$ suivie de celle de τ_α , on a donc $\tau_\alpha \cdot \tau_{\alpha'} = \tau_{\alpha + \alpha'}$. Enfin on pourra noter 1 l'opérateur τ_0 . Ainsi, on a

$$(1 - \tau_\alpha) \cdot \theta = \theta - \tau_\alpha \cdot \theta.$$

Lemme 1 Soit l un entier naturel et soit $\alpha > 0$. Si v est une fonction de classe C^l sur \mathbb{R} , alors la fonction $v * H_\alpha = H_\alpha * v$ est de classe C^{l+1} . De plus, on a

$$(v * H_\alpha)' = (H_\alpha * v)' = \frac{1}{\alpha} (1 - \tau_\alpha) \cdot v. \quad (5)$$

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$v * H_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x-t) H_\alpha(t) dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha v(x-t) dt = \frac{1}{\alpha} \int_{x-\alpha}^x v(\eta) d\eta.$$

(On a posé $\eta = x - t$.) La fonction $v * H_\alpha$ est donc dérivable sur \mathbb{R} et, de plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, (v * H_\alpha)'(x) = \frac{v(x) - v(x - \alpha)}{\alpha} = \left(\frac{1}{\alpha} (1 - \tau_\alpha) \cdot v \right)(x).$$

La fonction $(v * H_\alpha)'$ est donc de classe C^l sur \mathbb{R} , ce qui prouve que la fonction $v * H$ est de classe C^{l+1} sur \mathbb{R} . ■

Lemme 2 Soient $\alpha \geq 0$ et $\alpha' > 0$. Si v est une fonction continue sur \mathbb{R} , alors la fonction $\tau_\alpha \cdot (H_{\alpha'} * v)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et on a

$$(\tau_\alpha \cdot (H_{\alpha'} * v))' = \frac{1}{\alpha'} (\tau_\alpha \cdot (1 - \tau_{\alpha'}) \cdot v).$$

Démonstration. D'après le lemme 1, la fonction $H_{\alpha'} * v$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} . Ensuite, il est clair que la fonction $\tau_\alpha \cdot (H_{\alpha'} * v)$ est aussi de classe C^1 sur \mathbb{R} et que

$$(\tau_\alpha \cdot (H_{\alpha'} * v))' = \tau_\alpha \cdot ((H_{\alpha'} * v)') = \tau_\alpha \cdot \left(\frac{1}{\alpha'} (1 - \tau_{\alpha'}) \cdot v \right) = \frac{1}{\alpha'} (\tau_\alpha \cdot (1 - \tau_{\alpha'}) \cdot v).$$

■

Notation 3 Dans toute la suite du paragraphe 3, $(a_i)_{i \geq 0}$ désigne une suite décroissante de réels strictement positifs telle que $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = a < +\infty$. Pour tout entier k , on pose

$$u_k = H_{a_0} * \dots * H_{a_k}. \quad (6)$$

Alors, d'après la propriété 2, pour tout entier k , on a

$$\text{Supp}(u_k) \subset [0, a_0 + \dots + a_k] \subset [0, a].$$

Lemme 3 La fonction $H_{a_0} * H_{a_1}$ est une fonction continue telle que

$$\|H_{a_0} * H_{a_1}\|_\infty \leq \frac{1}{a_0}. \quad (7)$$

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(H_{a_0} * H_{a_1})(x) = \frac{1}{a_1} \int_{x-a_1}^x H_{a_0}(\eta) d\eta = \frac{1}{a_0} \frac{1}{a_1} l(x)$$

où $l(x)$ désigne la longueur de $[0, a_0] \cap [x - a_1, x]$. La fonction $H_{a_0} * H_{a_1}$ est donc définie par les formules explicites suivantes :

Si $x \leq 0$ ou si $x \geq a_0 + a_1$, $(H_{a_0} * H_{a_1})(x) = 0$.

Si $0 \leq x \leq a_1$, $(H_{a_0} * H_{a_1})(x) = \frac{1}{a_1} \frac{1}{a_0} x$.

Si $a_1 \leq x \leq a_0$, $(H_{a_0} * H_{a_1})(x) = \frac{1}{a_1} \frac{1}{a_0} (x - (x - a_1)) = \frac{1}{a_1} \frac{1}{a_0} a_1 = \frac{1}{a_0}$.

Si $a_0 \leq x \leq a_0 + a_1$, $(H_{a_0} * H_{a_1})(x) = \frac{1}{a_1} \frac{1}{a_0} (a_0 - (x - a_1)) = \frac{1}{a_1} \frac{1}{a_0} (a_0 + a_1 - x)$.

Il s'agit bien d'une fonction continue sur \mathbb{R} vérifiant la condition (7). ■

Lemme 4 Pour tout couple d'entiers (j, k) vérifiant $j \leq k - 1$, on a

$$\|H_{a_j} * \dots * H_{a_k}\|_\infty \leq \frac{1}{a_j}.$$

Démonstration. On fait une récurrence sur k . D'après le lemme 3 avec (a_j, a_{j+1}) à la place de (a_0, a_1) , le résultat est vrai si $k = j + 1$. Ensuite, on termine la récurrence en remarquant que, pour tout réel x , on a

$$(H_{a_j} * \dots * H_{a_{k+1}})(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (H_{a_j} * \dots * H_{a_k})(x - t) H_{a_{k+1}}(t) dt$$

et donc

$$|(H_{a_j} * \dots * H_{a_{k+1}})(x)| \leq \|H_{a_j} * \dots * H_{a_k}\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} H_{a_{k+1}}(t) dt$$

soit

$$|(H_{a_j} * \dots * H_{a_{k+1}})(x)| \leq \|H_{a_j} * \dots * H_{a_k}\|_\infty.$$

■

Lemme 5 Soit $k \in \mathbb{N}^*$, alors la fonction u_k est de classe C^{k-1} . De plus, pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq k-1$, on a

$$u_k^{(j)} = \frac{1}{a_0} \dots \frac{1}{a_{j-1}} (1 - \tau_{a_0}) \dots (1 - \tau_{a_{j-1}}) \cdot (H_{a_j} * \dots * H_{a_k}) \quad (8)$$

et

$$\|u_k^{(j)}\|_\infty \leq \frac{2^j}{a_0 \dots a_j}. \quad (9)$$

Démonstration. Précisons que dans ce lemme u_k est la fonction définie par l'égalité (6). D'autre part, dans le membre de droite de (8), la fonction

$$(1 - \tau_{a_0}) \dots (1 - \tau_{a_{j-1}}) \cdot (H_{a_j} * \dots * H_{a_k})$$

est la fonction obtenue en faisant agir successivement les opérateurs $1 - \tau_{a_{j-1}}$, $1 - \tau_{a_{j-2}}$, ..., $1 - \tau_{a_0}$. Ainsi $(1 - \tau_{a_0}) \dots (1 - \tau_{a_{j-1}})$ est une combinaison linéaire d'opérateurs de translation et la formule (8) peut aussi s'écrire

$$u_k^{(j)} = \frac{1}{a_0} \dots \frac{1}{a_{j-1}} \left[1 + \sum_{l=1}^j (-1)^l \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_l) \in \mathbb{N}^l, \\ 0 \leq i_1 < \dots < i_l \leq j-1}} \tau_{a_{i_1} + \dots + a_{i_l}} \right] \cdot H_{a_j} * \dots * H_{a_k}. \quad (10)$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $H_{a_0} * H_{a_1}$ est continue donc l'application répétée du lemme 1 assure que la fonction u_k est de classe C^{k-1} . De plus, on a

$$u_k' = \frac{1}{a_0} (1 - \tau_{a_0}) \cdot H_{a_1} * \dots * H_{a_k},$$

ce qui démontre la formule (10), au rang $j = 1$. Soit $j \in \mathbb{N}^*$, avec $j \leq k-2$, on suppose que la formule est vraie au rang j . Alors, en utilisant les lemmes 1 et

2, on a

$$\begin{aligned}
u_k^{(j+1)} &= \frac{1}{a_0} \dots \frac{1}{a_{j-1}} \left(\frac{1}{a_j} (1 - \tau_{a_j}) \cdot H_{a_{j+1}} * \dots * H_{a_k} \right) \\
&+ \frac{1}{a_0} \dots \frac{1}{a_{j-1}} \sum_{l=1}^j \left[(-1)^l \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_l) \in \mathbb{N}^l, \\ 0 \leq i_1 < \dots < i_l \leq j-1}} \tau_{a_{i_1} + \dots + a_{i_l}} \right] \frac{1}{a_j} (1 - \tau_{a_j}) \cdot H_{a_{j+1}} * \dots * H_{a_k} \\
&= \frac{1}{a_0} \dots \frac{1}{a_j} \left[1 + \sum_{l=1}^{j+1} (-1)^l \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_l) \in \mathbb{N}^l, \\ 0 \leq i_1 < \dots < i_l \leq j}} \tau_{a_{i_1} + \dots + a_{i_l}} \right] \cdot H_{a_{j+1}} * \dots * H_{a_k} \\
&= \frac{1}{a_0} \dots \frac{1}{a_j} (1 - \tau_{a_0}) \dots (1 - \tau_{a_j}) \cdot H_{a_{j+1}} * \dots * H_{a_k}.
\end{aligned}$$

Ce qui démontre la formule (10), au rang $j + 1$.

Enfin, comme le membre de droite de (10) contient $1 + \sum_{l=1}^j \binom{j}{l} = 2^j$ termes, l'inégalité (9) découle du lemme 4. ■

On peut maintenant énoncer et démontrer le théorème principal de ce paragraphe.

Théorème 2 Soit $(a_i)_{i \geq 0}$ une suite décroissante de réels strictement positifs telle que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = a < +\infty.$$

Alors, il existe une fonction u de classe C^∞ sur \mathbb{R} , positive, dont le support est inclus dans $[0, a]$, d'intégrale égale à 1, telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}} |u^{(k)}(x)| \leq \frac{2^k}{a_0 \dots a_k}. \quad (11)$$

Démonstration. Pour tout entier k , on considère la fonction u_k définie par l'égalité (6). On rappelle que si $k \geq 2$, alors u_k est de classe C^1 .

Si p et q sont des entiers vérifiant $2 \leq p < q$, on a

$$\|u_q - u_p\|_\infty = \|u_p * \psi_{p,q} - u_p\|_\infty,$$

en posant $\psi_{p,q} = H_{a_{p+1}} * \dots * H_{a_q}$. D'après le corollaire 1, $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{p,q}(t) dt = 1$, donc

$$(u_p * \psi_{p,q} - u_p)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u_p(x-t) - u_p(x)) \psi_{p,q}(t) dt$$

et, comme $\psi_{p,q}$ est une fonction positive, on a

$$|(u_q - u_p)(x)| \leq \sup_{t \in \text{Supp}(\psi_{p,q})} |u_p(x-t) - u_p(x)| \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{p,q}(t) dt$$

soit

$$|(u_q - u_p)(x)| \leq \sup_{t \in \text{Supp}(\psi_{p,q})} |u_p(x-t) - u_p(x)|.$$

D'après la propriété 2, le support de $\psi_{p,q}$ est inclus dans $[0, a_{p+1} + \dots + a_q]$. Donc l'inégalité des accroissements finis donne

$$|(u_q - u_p)(x)| \leq \|u'_p\|_\infty (a_{p+1} + \dots + a_q)$$

ce qui implique, en utilisant (9),

$$\|u_q - u_p\|_\infty \leq \frac{2}{a_0 a_1} (a_{p+1} + \dots + a_q).$$

Comme $a_{p+1} + \dots + a_q$ est un reste de Cauchy de la suite des sommes partielles de la série convergente $\sum_{i \geq 0} a_i$, on en déduit que la suite de fonctions $(u_k)_{k \geq 2}$ vérifie le critère de Cauchy pour $\|\cdot\|_\infty$, la norme de la convergence uniforme. Donc la suite $(u_k)_{k \geq 0}$ converge uniformément vers une fonction continue que l'on note u et qui vérifie, bien évidemment, $\text{Supp}(u) \subset [0, a]$. D'autre part, d'après le corollaire 1, $\int_{-\infty}^{+\infty} u_k(x) dx = 1$, pour tout $k \geq 2$. On en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x) dx = 1$.

Si $k \geq 3$, le lemme 5 assure que la fonction u_k est au moins de classe C^2 et que $u'_k = \frac{1}{a_0} (1 - \tau_{a_0}) \cdot (H_{a_1} * \dots * H_{a_k})$. Alors, si $3 \leq p \leq q$, on a

$$\|u'_q - u'_p\|_\infty = \left\| \frac{1}{a_0} (1 - \tau_{a_0}) \cdot (v_q - v_p) \right\|_\infty \leq \frac{2}{a_0} \|v_q - v_p\|_\infty.$$

en posant $v_k = H_{a_1} * \dots * H_{a_k}$, pour tout $k \geq 3$. La suite $(v_k)_{k \geq 3}$ est de Cauchy puisque du même acabit que $(u_k)_{k \geq 2}$; on en déduit que la suite $(u'_k)_{k \geq 3}$ est de Cauchy (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$). Il s'ensuit que la fonction u est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

On démontre de la même manière que, pour tout entier j , la suite $(u_k^{(j)})_{k \geq j+2}$ vérifie le critère de Cauchy pour la norme de la convergence uniforme. On en déduit que la fonction u est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

Enfin l'inégalité (11) résulte immédiatement de (9). ■

4 Le théorème de Borel dans le carré d'une classe

Dans ce paragraphe, on définit les classes ultradifférentiables. Ensuite on démontre un théorème de Borel avec perte de régularité. La démonstration s'inspire des travaux de H.-J. Petzsche qui a démontré des théorèmes de ce type, dans un contexte légèrement différent. (Voir [Pe].)

Définition 3 Soit $(M_p)_{p \geq 0}$ une suite de réels strictement positifs avec $M_0 = 1$. On pose $m_0 = 1$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $m_p = \frac{M_p}{M_{p-1}}$. On dit que la suite $(M_p)_{p \geq 0}$ est *logarithmiquement convexe* lorsque la suite $(m_p)_{p \geq 0}$ est croissante.

Définition 4 Soit $(M_p)_{p \geq 0}$ une suite logarithmiquement convexe et soit $C \in \mathbb{R}_+^*$. On note $\{C^p p! M_p\}$ l'ensemble des suites réelles $(u_p)_{p \geq 0}$ vérifiant

$$\sup_{p \in \mathbb{N}} \frac{|u_p|}{C^p p! M_p} < +\infty.$$

On vérifie facilement que l'espace de suites $\{C^p p! M_p\}$, muni de la norme $\|\cdot\|_{\{C^p p! M_p\}}$ définie par $\|(u_p)_{p \geq 0}\|_{\{C^p p! M_p\}} = \sup_{p \in \mathbb{N}} \frac{|u_p|}{C^p p! M_p}$, est un espace de Banach.

Définition 5 Soit $(M_p)_{p \geq 0}$ une suite logarithmiquement convexe et soit $\tilde{C} \in \mathbb{R}_+^*$. On note $\{\tilde{C}^p p! M_p, \mathbb{R}\}$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur \mathbb{R} vérifiant

$$\sup_{p \in \mathbb{N}} \frac{\|f^{(p)}\|_\infty}{\tilde{C}^p p! M_p} < +\infty.$$

On vérifie facilement que l'espace $\{\tilde{C}^p p! M_p, \mathbb{R}\}$, muni de la norme $\|\cdot\|_{\{\tilde{C}^p p! M_p, \mathbb{R}\}}$ définie par $\|f\|_{\{\tilde{C}^p p! M_p, \mathbb{R}\}} = \sup_{p \in \mathbb{N}} \frac{\|f^{(p)}\|_\infty}{\tilde{C}^p p! M_p}$, est un espace de Banach.

On parlera de «la classe $\{C^p p! M_p\}$ » ou de «la classe $\{\tilde{C}^p p! M_p, \mathbb{R}\}$ ».

Remarque 2 Si $f \in \{\tilde{C}^p p! M_p, \mathbb{R}\}$, alors $\|f^{(p)}\|_\infty \leq \tilde{C}^p p! M_p \|f\|_{\{\tilde{C}^p p! M_p, \mathbb{R}\}}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. Ainsi la suite $(M_p)_{p \geq 0}$ mesure le «défaut d'analyticité» de la classe.

Remarque 3 Nous avons supposé que les classes sont définies avec des suites $(M_p)_{p \geq 0}$ logarithmiquement convexes, ce qui inclus aussi l'hypothèse $M_0 = 1$. C'est assez naturel car cela donne aux espaces de bonnes propriétés. On peut par exemple vérifier que si f et g appartiennent à $\{\tilde{C}^p p! M_p, \mathbb{R}\}$, alors le produit fg appartient à $\{(2\tilde{C})^p p! M_p, \mathbb{R}\}$.

Pour terminer cette série de définitions nous allons définir la non quasi-analyticité. C'est une condition liée au théorème de Denjoy-Carleman dont l'énoncé est donné au paragraphe 6.

Définition 6 On dit que la suite de réels strictement positifs $(M_p)_{p \geq 0}$ est *non quasi-analytique* lorsque c'est une suite logarithmiquement convexe vérifiant l'hypothèse (H_{nqa}) suivante

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{M_{p-1}}{p M_p} < +\infty$$

c'est-à-dire, en utilisant les notations de la définition 3, lorsque

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{pm_p} < +\infty.$$

Théorème 3 Soit $(M_p)_{p \geq 0}$ une suite non quasi-analytique et soit $C > 0$. Il existe une constante $U > 0$ et une application linéaire continue

$$T : \{C^p p! M_p\} \rightarrow \{(CU)^p p! M_p^2, \mathbb{R}\}$$

telles que, pour toute suite $u = (u_p)_{p \geq 0}$ appartenant à $\{C^p p! M_p\}$, on ait

$$\forall j \in \mathbb{N}, (T(u))^{(j)}(0) = u_j.$$

De plus, la constante U ne dépend que de la suite $(M_p)_{p \geq 0}$.

Démonstration. On utilise encore les notations de la définition 3. Soit h un réel strictement positif qui sera fixé ultérieurement. Soit $p \in \mathbb{N}$, on considère la suite $(a_i)_{i \geq 0}$ définie par

$$\forall i \leq p-1, a_i = \frac{1}{hpm_p}$$

et

$$\forall i \geq p, a_i = \frac{1}{h(i+1)m_{i+1}^2}.$$

C'est une suite décroissante de réels strictement positifs. De plus la série de terme général a_i est convergente. Plus précisément, on a

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{m_p} + \sum_{i=p}^{+\infty} \frac{1}{(i+1)m_{i+1}^2} \right) \leq \frac{1}{h} \left(\frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_p} \sum_{i=p}^{+\infty} \frac{1}{(i+1)m_{i+1}} \right) \leq \frac{A}{hm_p},$$

en posant $A = 1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{M_{i-1}}{iM_i}$. On peut donc utiliser le théorème 2 avec cette suite $(a_i)_{i \geq 0}$. On note u_p la fonction obtenue ; elle est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , positive, son support est inclus dans $\left[0, \frac{A}{hm_p}\right]$ et son intégrale vaut 1. Pour tout $l \leq p-1$, on a

$$\|u_p^{(l)}\|_\infty \leq 2^l (hpm_p)^{l+1}$$

et, pour tout $l \geq p$, on a

$$\|u_p^{(l)}\| \leq 2^l h^{l+1} (pm_p)^p \frac{(l+1)!}{p!} \left(\frac{M_{l+1}}{M_p} \right)^2.$$

(En effet, $\frac{2^l}{a_0 \dots a_l} = \frac{2^l}{\left(\frac{1}{hpm_p}\right)^p \frac{1}{h(p+1)m_{p+1}^2} \dots \frac{1}{h(l+1)m_{l+1}^2}}$ et $m_{p+1} \dots m_{l+1} = \frac{M_{l+1}}{M_p}$.)

Soit

$$\varphi_p : x \mapsto 1 - \int_{-\infty}^{|x|} u_p(t) dt.$$

Cette fonction est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et son support est inclus dans $\left[-\frac{A}{hm_p}, \frac{A}{hm_p}\right]$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a $\varphi_p^{(j)}(0) = \delta_{0,j}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on a $\left\|\varphi_p^{(j)}\right\|_\infty = \left\|u_p^{(j-1)}\right\|_\infty$. Comme $\left\|\varphi_p^{(0)}\right\|_\infty \leq 1$, on a donc

$$\left\|\varphi_p^{(j)}\right\|_\infty \leq (2hpm_p)^j \text{ si } 0 \leq j \leq p \quad (12)$$

et

$$\left\|\varphi_p^{(j)}\right\|_\infty \leq (2h)^j (pm_p)^p \left(\frac{M_j}{M_p}\right)^2 \frac{j!}{p!} \text{ si } j > p. \quad (13)$$

Enfin, on considère

$$\chi_p : x \mapsto \frac{\varphi_p(x)x^p}{p!}.$$

Les fonctions χ_p ainsi définies vont jouer le même rôle que les fonctions qui interviennent dans la série (3) du paragraphe 2. Nous allons montrer que, en choisissant h suffisamment petit, l'application

$$T : (x_p)_{p \geq 0} \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} x_p \chi_p$$

convient. Pour cela nous allons estimer $\left\|\chi_p^{(j)}\right\|_\infty$.

Dans les calculs qui suivent on prend la convention suivante : $m_{l+1} \dots m_j = 1$ lorsque $l = j$.

Soit (p, j) un couple d'entiers. Comme le support de φ_p est inclus dans $\left[-\frac{A}{hm_p}, \frac{A}{hm_p}\right]$, en utilisant la formule de Leibniz et les estimations (12) et (13), on obtient

$$\begin{aligned} \left\|\chi_p^{(j)}\right\|_\infty &= \sup_{x \in \left[-\frac{A}{hm_p}, \frac{A}{hm_p}\right]} \left| \sum_{l=\max(0, j-p)}^j \binom{j}{l} \varphi_p^{(l)}(x) \frac{x^{p-j+l}}{(p-j+l)!} \right| \\ &\leq \sum_{l=\max(0, j-p)}^j \binom{j}{l} \left\|\varphi_p^{(l)}\right\|_\infty \frac{\left(\frac{A}{hm_p}\right)^{p-j+l}}{(p-j+l)!} \\ &\leq \sum_{l; \max(0, j-p) \leq l \leq \min(j, p)} \binom{j}{l} (2hpm_p)^l \frac{\left(\frac{A}{hm_p}\right)^{p-j+l}}{(p-j+l)!} \\ &+ \sum_{l; \max(p+1, j-p) \leq l \leq j} \binom{j}{l} (2h)^l (pm_p)^p \left(\frac{M_l}{M_p}\right)^2 \frac{l!}{p!} \frac{\left(\frac{A}{hm_p}\right)^{p-j+l}}{(p-j+l)!}. \end{aligned}$$

Dans la première somme, écrivons

$$\frac{p^l}{(p-j+l)!} = \frac{j!}{p!} \frac{p^l p!}{j!(p-j+l)!} \leq \frac{j!}{p!} \frac{(p+l)!}{j!(p-j+l)!} = \frac{j!}{p!} \binom{p+l}{j} \leq \frac{j!}{p!} 2^{p+l}$$

ainsi que

$$\frac{1}{m_p^{p-j}} \leq \frac{1}{m_{j+1} \dots m_p} = \frac{M_j}{M_p} \leq \frac{M_j^2}{M_p} \text{ lorsque } j \leq p$$

et

$$m_p^{j-p} \leq m_{p+1} \dots m_j = \frac{M_j}{M_p} \leq \frac{M_j^2}{M_p} \text{ lorsque } j > p.$$

Dans la seconde, écrivons

$$\frac{p^p l!}{p!(p-j+l)!} \leq \frac{j!}{p!} \frac{(p+l)!}{j!(p-j+l)!} = \frac{j!}{p!} \binom{p+l}{p} \leq \frac{j!}{p!} 2^{p+l}$$

ainsi que

$$m_p^{j-l} \left(\frac{M_l}{M_p} \right)^2 \leq M_l m_{l+1} \dots m_j \frac{M_l}{M_p} = \frac{M_j M_l}{M_p} \leq \frac{M_j^2}{M_p}.$$

Il vient

$$\left\| \chi_p^{(j)} \right\|_\infty \leq \frac{j!}{p!} \frac{M_j^2}{M_p} h^{j-p} (2A)^p \sum_{l=\max(0, j-p)}^j \binom{j}{l} 4^l \left(\frac{1}{A} \right)^{j-l}.$$

On peut donc en conclure que, pour tout couple d'entiers (p, j) , on a

$$\left\| \chi_p^{(j)} \right\|_\infty \leq \frac{j! M_j^2}{p! M_p} \left(\frac{2A}{h} \right)^p \left(4h + \frac{h}{A} \right)^j.$$

Maintenant, on fixe $h = 4AC$. Si $(u_p)_{p \geq 0}$ est une suite appartenant à $\{C^p p! M_p\}$, alors, pour tout entier j , on a

$$\left\| u_p \chi_p^{(j)} \right\|_\infty \leq C^p p! M_p \left\| (u_p)_{p \geq 0} \right\|_{\{C^p p! M_p\}} \frac{j! M_j^2}{p! M_p} \left(\frac{2A}{h} \right)^p \left(4h + \frac{h}{A} \right)^j$$

c'est-à-dire, avec la valeur de h choisie,

$$\left\| u_p \chi_p^{(j)} \right\|_\infty \leq \left\| (u_p)_{p \geq 0} \right\|_{\{C^p p! M_p\}} j! M_j^2 ((16A + 4)C)^j \left(\frac{1}{2} \right)^p.$$

On en déduit que la série $\sum_{p \geq 0} \left\| x_p \chi_p^{(j)} \right\|_\infty$ converge et que sa somme vérifie

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \left\| u_p \chi_p^{(j)} \right\|_\infty \leq 2 \left\| (u_p)_{p \geq 0} \right\|_{\{C^p p! M_p\}} j! M_j^2 ((16A + 4)C)^j. \quad (14)$$

Ainsi, en utilisant le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions, on peut affirmer que la série de fonctions $\sum_{p \geq 0} u_p \chi_p$ converge et que

$\sum_{p=0}^{+\infty} u_p \chi_p$, sa somme, est une fonction de classe C^∞ . On a donc défini une application T qui à $u = (u_p)_{p \geq 0} \in \{C^p p! M_p\}$ associe la fonction de classe C^∞

$$T(u) = \sum_{p=0}^{+\infty} u_p \chi_p.$$

Alors, pour tout entier j , on a

$$(T(u))^{(j)}(0) = \sum_{p=0}^{+\infty} u_p \chi_p^{(j)}(0) = \sum_{p=0}^{+\infty} u_p \delta_{p,j}(0) = u_j.$$

Maintenant, si on pose $U = 16A + 4$, alors, d'après l'inégalité (14), on a

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \frac{\|(T(u))^{(j)}\|_\infty}{j! M_j^2 (CU)^j} \leq 2 \left\| (u_p)_{p \geq 0} \right\|_{\{C^p p! M_p\}}.$$

Donc la fonction $T(u)$ appartient à $\{(CU)^p p! M_p, \mathbb{R}\}$ et elle vérifie

$$\|T(u)\|_{\{(CU)^p p! M_p, \mathbb{R}\}} \leq 2 \left\| (u_p)_{p \geq 0} \right\|_{\{C^p p! M_p\}}.$$

Comme la linéarité de l'application T est évidente, on peut conclure que T est un opérateur linéaire continu de $\{C^p p! M_p\}$ dans $\{(CU)^p p! M_p, \mathbb{R}\}$ réalisant la seconde condition du théorème 3. ■

Remarque 4 La fonction $T(u)$ ainsi construite est à support compact.

5 Le théorème de Borel dans une intersection de classes

Dans cette partie, on définit une intersection de classes construite sur le modèle de l'intersection des classes de Gevrey. Ensuite on énonce un théorème de Borel dans ce contexte et enfin on donne un aperçu de sa démonstration. Certains détails et compléments sont laissés au lecteur sous forme d'exercices et un lemme un peu technique sera admis.

Dans tout ce paragraphe, on suppose que ϕ est une fonction convexe croissante sur \mathbb{R}_+ et nulle en 0. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la suite logarithmiquement convexe $(M_{ap}^{(\phi)})_{p \geq 0}$ en posant :

$$\forall p \in \mathbb{N}, M_{ap}^{(\phi)} = \exp(\phi(ap)).$$

On peut alors considérer les espaces

$$I_\phi = \bigcap_{a > 0} \{p! M_{ap}^{(\phi)}\} \text{ et } I_\phi(\mathbb{R}) = \bigcap_{a > 0} \{p! M_{ap}^{(\phi)}, \mathbb{R}\}.$$

Ces intersections sont décroissantes puisque, par exemple, $a \leq b$ implique

$$\left\{ p!M_{ap}^{(\phi)} \right\} \subset \left\{ p!M_{bp}^{(\phi)} \right\}.$$

Remarque 5 Certains problèmes d'équations aux dérivées partielles conduisent à définir les classes de Gevrey. Les intersections de classe I_ϕ et $I_\phi(\mathbb{R})$ sont construites sur le modèle de l'intersection des classes de Gevrey non quasi-analytiques. (Voir l'exercice suivant.)

Exercice 1 Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on considère la classe de Gevrey non quasi-analytique $G^a(\mathbb{R}) = \{p!^{1+a}, \mathbb{R}\}$. On définit aussi l'espace de suites $G^a = \{p!^{1+a}\}$. Montrer que si ϕ est la fonction définie par $\phi(t) = t \ln(1+t)$, alors

$$I_\phi = \bigcap_{a>0} G^a \text{ et } I_\phi(\mathbb{R}) = \bigcap_{a>0} G^a(\mathbb{R}).$$

Exercice 2 Démontrer que la suite $\left(M_{ap}^{(\phi)}\right)_{p \geq 0}$ est non quasi-analytique pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si,

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t \exp\left(\frac{\phi(at)}{t}\right)} < +\infty. \quad (15)$$

Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Carleman :

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \sum_{i=1}^n (a_1 \dots a_i)^{\frac{1}{i}} \leq e \sum_{i=1}^n a_i.$$

Définition 7 On dit que la fonction ϕ est *complètement non quasi-analytique* lorsqu'elle vérifie la condition (15).

Exercice 3 Etablir que la condition (15) est équivalente à la condition de croissance suivante pour la fonction ϕ :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\phi(t)}{t \ln(\ln t)} = +\infty.$$

Nous admettrons le lemme suivant.

Lemme 6 [Be1] ou [Be2] Soit ϕ une fonction complètement non quasi-analytique et soit $(u_p)_{p \geq 0}$ une suite appartenant à I_ϕ . Il existe une fonction ψ , convexe croissante sur \mathbb{R}_+ et nulle en 0 telle que, si on pose $M_p^{(\psi)} = \exp(\psi(p))$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, alors $\left(M_p^{(\psi)}\right)_{p \geq 0}$ est une suite non quasi-analytique vérifiant les conditions suivantes

$$\forall a > 0, \exists C_2(a) > 0, \forall p \in \mathbb{N}, M_p^{(\psi)} \leq C_2(a) M_{ap}^{(\phi)}, \quad (16)$$

$$\exists A > 0, \forall p \in \mathbb{N}, |u_p| \leq p! A M_p^{(\psi)}. \quad (17)$$

Remarque 6 La condition (17) signifie que la suite u appartient à $\{p!M_p^{(\psi)}\}$.

Théorème 4 Soit ϕ une fonction complètement non quasi-analytique. Pour toute suite u appartenant à I_ϕ , il existe une fonction f appartenant à $I_\phi(\mathbb{R})$ telle que l'on ait

$$\forall j \in \mathbb{N}, f^{(j)}(0) = u_j.$$

Démonstration. Soit u une suite appartenant à I_ϕ . On applique le lemme précédent et on pose $(M_p)_{p \geq 0} = (M_p^{(\psi)})_{p \geq 0}$. Alors, d'après le théorème 3, il existe une fonction $f \in \{U^p p! M_p^2, \mathbb{R}\}$ telle que

$$\forall j \in \mathbb{N}, f^{(j)}(0) = u_j.$$

On conclut en remarquant que cette fonction appartient à $\bigcap_{a>0} \{p!M_{ap}^{(\phi)}, \mathbb{R}\}$. En effet, comme la fonction ψ est convexe, pour tout $a > 0$ et tout $p \in \mathbb{N}$, avec les notations de l'inégalité (16), on a

$$U^p M_p^2 \leq U^p M_{2p} \leq \frac{U^p}{M_{2p}} M_{4p} \leq \left(\sup_{p \in \mathbb{N}} \frac{U^p}{M_{2p}} \right) C_2 \left(\frac{a}{4} \right) M_{ap}^{(\phi)}.$$

■

Exercice 4 Soit ϕ une fonction complètement non quasi-analytique. On munit l'espace $I_\phi = \bigcap_{a>0} \{p!M_{ap}^{(\phi)}\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{p!M_{2^{-n}p}^{(\phi)}\}$ de la famille de normes

$$\left(\|\cdot\|_{\{p!M_{2^{-n}p}^{(\phi)}\}} \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et l'espace } I_\phi(\mathbb{R}) = \bigcap_{a>0} \{p!M_{ap}^{(\phi)}, \mathbb{R}\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{p!M_{2^{-n}p}^{(\phi)}, \mathbb{R}\}$$

de la famille de normes $\left(\|\cdot\|_{\{p!M_{2^{-n}p}^{(\phi)}, \mathbb{R}\}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$. Ainsi, on peut considérer que les espaces I_ϕ et $I_\phi(\mathbb{R})$ sont des intersections dénombrables d'espaces de Banach. On vérifie donc facilement que ce sont des espaces de Fréchet. Montrer qu'il n'y a pas de version linéaire continue du théorème 4 ; c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'application linéaire continue

$$L : I_\phi \rightarrow I_\phi(\mathbb{R})$$

telle que, pour toute suite de réels $u = (u_p)_{p \geq 0}$ appartenant à I_ϕ , on ait

$$\forall p \in \mathbb{N}, (L(u))^{(p)}(0) = u_p.$$

Indications. Si on suppose le contraire, la continuité de L s'exprime par la condition suivante :

pour tout $a > 0$, il existe deux réels $b > 0$ et $C \geq 0$ tels que, pour toute suite u appartenant à I_ϕ , on ait

$$\|L(u)\|_{\{p!M_{ap}^{(\phi)}, \mathbb{R}\}} \leq C \|u\|_{\{p!M_{bp}^{(\phi)}\}}. \quad (18)$$

(Voir par exemple la proposition 22.6 de [MV].)

Montrer qu'il existe alors $(\chi_m)_{m \geq 0}$, une suite d'éléments de $I_\phi(\mathbb{R})$, telle que

$$\forall (m, k) \in \mathbb{N}^2, \chi_m^{(k)}(0) = \delta_{k,m}$$

et

$$\forall m \in \mathbb{N}, \|\chi_m\|_{\{p!M_{ap}^{(\phi)}, \mathbb{R}\}} \leq \frac{C}{m!M_{bm}^{(\phi)}}. \quad (19)$$

En particulier, avec $a = 1$, il existe deux constantes $b_1 > 0$ et C_1 telles que

$$\sup_{y \in \mathbb{R}_+} |\chi_m(y)| \leq \frac{C_1}{m!M_{b_1 m}^{(\phi)}}.$$

Montrer qu'il existe aussi deux constantes b_2 et C_2 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall m \in \mathbb{N}, \left| \chi_m^{(m)}(x) - 1 \right| \leq \frac{x^m}{m!} \frac{C_2}{m!M_{b_2 m}^{(\phi)}} (2m)!M_{b_1 m}^{(\phi)}$$

puis qu'il existe $\tau_m > 0$ (dépendant de m mais aussi de b_1, b_2 et C_2) tel que

$$\forall x \in [0, \tau_m], \chi_m^{(m)}(x) \geq \frac{1}{2}.$$

En déduire que

$$\frac{1}{2} \frac{\tau_m^m}{m!} \leq \chi_m(\tau_m) \leq \frac{C_1}{m!M_{b_1 m}^{(\phi)}}$$

puis une contradiction.

Remarque 7 L'exercice précédent met en lumière l'une des similitudes entre ces intersections et la classe $C^\infty(\mathbb{R})$ pour laquelle il n'existe pas de version linéaire continue du théorème de Borel. (Voir [Be3].)

Remarque 8 Notons R l'application de $I_\phi(\mathbb{R})$ dans I_ϕ qui à f associe la suite $(f^{(j)}(0))_{j \geq 0}$. Le théorème 4 affirme que si la fonction ϕ est complètement non quasi-analytique, alors l'application R est surjective. On suppose que la classe I_ϕ n'est pas analytique, c'est à-dire que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\phi(t)}{t} = +\infty$. Alors, en utilisant le théorème de l'application ouverte, on peut montrer que la réciproque est vraie. On a donc une réponse complète dans ces intersections de classes.

6 Commentaires

La notion de non quasi-analyticité de la définition 6 est liée au théorème de Denjoy-Carleman qui peut s'énoncer ainsi :

Théorème 5 La classe $\{p!M_p, \mathbb{R}\}$ contient des fonctions non nulles à support compact si, et seulement si, la suite $(M_p)_{p \geq 0}$ est non quasi-analytique.

Le théorème 2 permet de prouver l'une des implications. En effet, si on suppose que la suite $(M_p)_{p \geq 0}$ est non quasi-analytique, alors en appliquant le théorème 2 à la suite $(a_i)_{i \geq 0}$ définie par $a_0 = 2$ et $\forall i \geq 1, a_i = \frac{2}{im_i}$, on obtient une fonction non nulle, à support compact, appartenant à $\{p!M_p, \mathbb{R}\}$. Le lecteur souhaitant voir une autre démonstration de cette implication peut se reporter au sujet de l'agrégation interne de 2001. Pour une démonstration complète du théorème de Denjoy-Carleman, on pourra consulter [Hö], [Ma] ou [Ru]. Les principales propriétés de quasi-analyticité sont expliquées dans [Th].

Le théorème 3 est un résultat que j'ai démontré en 1997 pour essayer de répondre à un problème posé par Jacques Chaumat. Il s'agissait de construire des classes ultradifférentiables ayant de «bonnes propriétés». Dans le cahier des charges, on voulait notamment qu'il y ait une version ultradifférentiable du théorème de Borel (le théorème 4). Par la suite le théorème 3 ne fut pas utilisé car le théorème 4 est devenu un cas particulier d'une version ultradifférentiable du théorème de Whitney (voir [Be1] ou [Be2]). Dans [Be3], on a expliqué que le théorème de Whitney généralise celui de Borel. Il n'est donc pas surprenant que ce soit aussi le cas lorsque l'on travaille dans des classes ultradifférentiables. Toutefois, je me suis rendu compte depuis que, lorsque l'on dispose d'un théorème de type Borel, il y a une méthode qui permet, dans tous les cas connus, de démontrer le théorème de Whitney correspondant. On peut notamment démontrer le théorème de Whitney classique à partir du théorème de Borel classique. Mais c'est une autre histoire.

Bibliographie

- [Be1] P. Beaugendre, *Extensions de jets dans des intersections de classes non quasi-analytiques*. Ann. Polon. Math. 76 (2001) , 213-243.
- [Be2] P. Beaugendre, *Intersections de classes non quasi-analytiques*. Thèse, Orsay (2002). (Téléchargeable sur le site de l'Université.)
- [Be3] P. Beaugendre, *Un opérateur d'extension linéaire explicite*, RMS. Volume 116 n°1 (2005), 28-44.
- [Bo] E. Borel, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, Ann. Sci. Ec. Norm. Super., IV. Ser. 12 (1895), 9-55.
- [Hö] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Springer-Verlag (1990).
- [MV] R. Meise et D. Vogt, *Introduction to Functional Analysis*. Oxford Graduate Texts in Mathematics (1997).
- [Ma] S. Mandelbrot, *Séries adhérentes, régularisation des suites, applications*. Coll. Borel. Gauthier-Villars (1952).
- [Pe] H.-J. Petzsche, *On a E. Borel theorem*. Math. Ann 282 (1988), 299-313.
- [Ru] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*. Masson, (1992).
- [Th] V. Thilliez, *Quelques propriétés de quasi-analyticité*. Gazette des Mathématiciens 70 (1996), 49-68.