Cet article donne un aperçu de la théorie du degré pour une application du cercle unité de C dans lui-même. Les résultats présentés ici ne sont pas encore très connus. En effet, ce n'est qu'en 1996 après un congrès en l'honneur de I.M. Gelfand que H. Brézis a donné sa jolie formule exprimant le degré d'une application du cercle unité dans lui-même, à partir des modules de ses coefficients de Fourier, sous certaines conditions de régularité.

C'est cette formule qui a motivé les travaux récents que présente mon article et, comme vous pourrez le constater nous n'utiliserons que des outils relativement élémentaires.

Voici le plan de cet article.

Nous donnons tout d'abord la démonstration de la formule de Brézis lorsque la fonction est de classe C^1. C'est un joli exercice qui n'utilise que le théorème de relèvement et le théorème de Parseval. (Les versions qui figurent actuellement au programme de classes préparatoires MP suffisent.)

Ensuite, nous démontrons un théorème de relèvement qui permet de définir le degré d'une fonction continue.

Après nous établissons que la formule de Brézis reste valide pour une fonction continue qui appartient aussi à un espace de Sobolev fractionnaire d'exposant 1/2.

Enfin, nous démontrons une autre formule pour le degré d'une fonction höldérienne d'ordre oméga strictement supérieur à 1/3 . Il s'agit d'un théorème de Jean-Pierre Kahane très récent dont la démonstration, très astucieuse, n'est pas trop difficile.